RELACIÓN ENTRE PRODUCTOS CUADRÁTICOS CONSECUTIVOS: UNA IDENTIDAD ALGEBRAICA GENERALIZADA

Acevedo Jiménez, José

Abstract

This paper presents and proves a novel algebraic identity involving quadratic expressions with two parameters, b and c. The identity equates the product of two consecutive quadratic expressions to a structured combination of squares and linear terms of a single quadratic. A brief overview of the concept and history of algebraic identities is provided, followed by a detailed step by-step verification of the inherent symmetry and algebraic elegance of parameterized expressions and highlights potentials educational and analytical applications.

Resumen

Este trabajo expone una identidad algebraica notable que involucra los parámetros b y c, cuya validez se demuestra para todo número entero n. A modo de introducción, se ofrece una definición concisa del concepto de identidad algebraica, acompañada de un breve recorrido histórico que contextualiza su desarrollo y relevancia dentro de las matemáticas. A continuación, se descompone cuidadosamente la estructura de la igualdad, abordando cada uno de sus elementos y su papel dentro de la demostración general. Para concluir, se examina el potencial valor didáctico y analítico de la identidad, destacando su utilidad tanto en la enseñanza de álgebra como en la comprensión profunda de patrones algebraicos.

Palabras clave: Identidad cuadrática, sucesiones cuadráticas, álgebra elemental, factorización polinómica, teoría de números.

[1] Departamento Ingeniería, Instituto Avanzado de Tecnologías en Ciencias e Innovación (IATECI) - República Dominicana
[2] jose.acevedo.j@iateci.edu.do

1. Introducción

Las identidades algebraicas son igualdades que se cumplen para todos los valores posibles de las variables dentro de un dominio dado. A diferencia de una ecuación, cuya validez depende de condiciones específicas, una identidad expresa una relación universal. Ejemplos clásicos como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ o el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$, muestran cómo estas igualdades capturan estructuras profundas de los números y las formas.
En este trabajo presentamos y demostramos una identidad algebraica novedosa que relaciona el producto de dos expresiones cuadráticas consecutivas con una combinación cuadrática única. Para todo número entero n, y para todo par de parámetros reales b y c, se verifica la siguiente igualdad:

$$(n^2+bn+c)((n+1)^2+b(n+1)+c) = (n^2+(b+1)n+c)^2 + b(n^2+(b+1)n+c)+c$$

Esta identidad destaca por su estructura simétrica y su potencial utilidad didáctica en la enseñanza del álgebra elemental, al ofrecer una forma alternativa de expresar productos de polinomios cuadráticos de manera compacta.
Las identidades algebraicas han ocupado un lugar central en la historia de las matemáticas. Desde los métodos prácticos de los babilonios y egipcios hasta las formulaciones geométricas de los griegos como Euclides, estas igualdades han sido herramientas clave para describir patrones y resolver problemas.
Durante la Edad Media, matemáticos del mundo islámico como al-Khwārizmī contribuyeron al desarrollo de un álgebra más general, y con el surgimiento de la notación simbólica en el Renacimiento, se hizo posible estudiar estas relaciones con mayor abstracción. En los siglos siguientes, figuras como Euler, Gauss y Jacobi ampliaron el alcance de las identidades, conectándola con la teoría de números y el análisis.
La identidad presentada en este artículo se inscribe en esa tradición: revela una conexión no evidente entre cuadráticos consecutivos y puede inspirar nuevas exploraciones tanto en el aula como en la investigación matemática.

2. Enunciado de la identidad

Para todo número entero n, y para todo par de números reales b y c, se cumple la siguiente identidad algebraica:

$$(n^2+bn+c)((n+1)^2+b(n+1)+c) = (n^2+(b+1)n+c)^2 + b(n^2+(b+1)n+c)+c. \quad 1$$

Esta identidad puede ser interpretada como una relación entre productos de expresiones cuadráticas consecutivas y combinaciones cuadráticas con parámetros.

3. Demostración

3.1 Lado izquierdo

Expandimos:

$$(n^2+bn+c)((n+1)^2+b(n+1)+c) = (n^2+bn+c)(n^2+(b+2)n+(b+c+1))$$

Este producto da lugar a:

$$n^4 + 2(b+1)n^3 + (b^2 + 3b + 2c + 1)n^2 + (b^2 + 2bc + b + 2c)n + c^2 + bc + c$$

3.2. Lado derecho

Sea $A = n^2 + (b+1)n + c$, entonces:

$$A^2 + bA + c = \left(n^2 + (b+1)n + c\right)^2 + b\left(n^2 + (b+1)n + c\right) + c$$

que, al expandir, da exactamente:

$$n^4 + 2(b+1)n^3 + (b^2 + 3b + 2c + 1)n^2 + (b^2 + 2bc + b + 2c)n + c^2 + bc + c$$

Por lo tanto, ambos lados de la identidad coinciden para todo n, b y c.

4. Casos particulares

4.1. caso: $b = 0$

Si tomamos $b = 0$, la identidad se reduce a:

$$(n^2 + c)((n+1)^2 + c) = (n^2 + n + c)^2 + c. \qquad 2$$

Desarrollo del lado izquierdo:

$$(n^2 + c)((n+1)^2 + c) = (n^2 + c)(n^2 + 2n + c + 1)$$

Expandiendo:

$$= n^4 + 2n^3 + (2c+1)n^2 + 2cn + c^2 + c$$

El lado derecho:

$$(n^2 + n + c)^2 + c = n^4 + 2n^3 + (2c+1)n^2 + 2cn + c^2 + c$$

Ambos lados son iguales, confirmando que la identidad se cumple cuando $b = 0$.

4.2. Caso: $c = 0$

Si tomamos $c = 0$, la identidad se reduce a:

$$(n^2 + bn)((n+1)^2 + b(n+1)) = (n^2 + (b+1)n)^2 + b(n^2 + (b+1)n). \qquad 3$$

4.3. Caso: $b = c = 0$

Esta es la forma más simple de la identidad:

$$n^2(n+1)^2 = (n^2 + n)^2. \qquad 4$$

Claramente, los dos lados son iguales. Este caso particular corresponde a una identidad más familiar.

5. Breve historia de las identidades algebraicas

Las identidades algebraicas han acompañado el desarrollo de las matemáticas desde sus inicios. En las antiguas civilizaciones, como la babilónica y la egipcia, ya se utilizaban

fórmulas matemáticas para resolver problemas prácticos, aunque sin notación simbólica. Estas fórmulas eran esencialmente identidades numéricas, aplicadas en contextos como la construcción o la contabilidad.
En la Grecia clásica, las identidades comenzaron a adquirir un carácter más formal. Pitágoras y sus seguidores relacionaron el álgebra con la geometría, y Euclides, en su obra *Los Elementos*, expuso numerosas igualdades geométricas, que hoy entendemos como identidades algebraicas expresadas visualmente. Un ejemplo es el teorema de Pitágoras, que puede interpretarse como una identidad geométrica.
Durante la Edad Media, el mundo islámico desempeñó un papel crucial en la conservación y desarrollo del conocimiento matemático. Matemáticos como al-Khwārizmī comenzaron a formular identidades con un enfoque más general, usando el lenguaje escrito para describir operaciones algebraicas como el cuadrado de un binomio. Aunque aún no se usaban símbolos, este fue un paso importante hacia la formalización del álgebra.
Con la llegada del Renacimiento, la matemática europea vivió una revolución gracias al desarrollo de la notación algebraica simbólica, liderada por figuras como François Viète y René Descartes**.** Esto permitió que las identidades se expresaran de forma más compacta y se manipularan de manera abstracta, lo que facilitó su generalización y estudio teórico.
Durante los siglos XVIII y XIX, el desarrollo de áreas como la teoría de números, el análisis y el cálculo trajo consigo identidades mucho más sofisticadas. Matemáticos como Euler**,** Gauss y Jacobi descubrieron igualdades que revelaban conexiones profundas entre distintas ramas de la matemática. La famosa identidad de Euler ($e^{i\pi} + 1 = 0$) es un ejemplo destacado, ya que relaciona varias constantes fundamentales en una sola fórmula elegante.
En el siglo XX y XXI, las identidades algebraicas han adquirido aún mayor importancia. Con el desarrollo de áreas como el álgebra abstracta, la teoría de grupos, la física teórica y la computación simbólica, las identidades se han convertido en herramientas esenciales para describir leyes naturales, simetrías y estructuras matemáticas complejas. Además, con el uso de programas de álgebra computacional, ahora es posible descubrir, verificar y explorar identidades extremadamente complejas de forma automática.

6. Discusión

La identidad analizada en este artículo revela relaciones profundas entre polinomios cuadráticos y sus composiciones. Al descomponer ambos lados de la ecuación y observar que su equivalencia se mantiene bajo diferentes valores de los parámetros b y c, se evidencia que esta identidad no es un caso aislado, sino parte de una familia más amplia de igualdades algebraicas con posibles aplicaciones didácticas y teóricas.
En particular, los casos especiales en los que uno o ambos parámetros se anulan permiten visualizar cómo esta identidad se relaciona con expresiones clásicas, como el cuadrado del producto $n(n+1)$. Esto puede servir como puente entre el álgebra elemental y formas más complejas de razonamiento simbólico. Además, el hecho de que al modificar ligeramente los coeficientes se obtengan identidades válidas sugiere que podrían existir otras estructuras similares esperando ser descubiertas o generalizadas.

Desde una perspectiva educativa, esta identidad ofrece una oportunidad para que los estudiantes practiquen expansión, factorización, sustitución y razonamiento algebraico profundo. Desde un ángulo más teórico, también podría estudiarse su conexión con identidades más generales o con propiedades de secuencias polinómicas.

Conclusión

Se ha demostrado una identidad algebraica que conecta el producto de dos expresiones cuadráticas consecutivas con una combinación cuadrática única, al cuadrado, más términos lineales parametrizados. Esta relación resalta una propiedad estructural interesante que puede extenderse o generalizarse en investigaciones futuras. Su simplicidad formal combinada con su riqueza estructural la convierten en un ejemplo útil tanto en la enseñanza como en exploraciones teóricas.

Referencias

1. Ribenboim, P. (2001). *Classical theory of algebraic numbers*. Springer-Verlag.
2. Engel, A. (1998). *Problem-solving strategies*. Springer-Verlag.
3. Baldor, A. (2006). *Álgebra*. Grupo Editorial Patria.
4. Herstein, I. N. (2000). *Temas de álgebra* (2.ª ed., traducción). Limusa.